Klausur – Aufgaben

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH ·
UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Studiengang	**Wirtschaftsingenieurwesen**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**WI-WMT-S12–050430**
Datum	**30.04.2005**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei nummerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Anzahl Aufgaben:	- 6 -
Höchstpunktzahl:	- 100 -

Hilfsmittel :
HFH-Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl		**Ergebnis**
von	**bis einschl.**	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 — 16 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{3x}{x(x-2)}+(x+1)=\frac{7-2x}{x-2}$$

im Bereich der reellen Zahlen.

Aufgabe 2 — 20 Punkte

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$$

und fassen Sie den erhaltenen Funktionsterm so weit wie möglich zusammen.

Hinweis:

Wenden Sie die Ihnen bekannten Logarithmengesetze in geeigneter Weise an. Die ermittelte Stammfunktion sollte – wenn möglich – nur **einen** Logarithmus-Term enthalten.

Aufgabe 3 — 20 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$y=f(x)=\frac{x}{x^2+2}\,.$$

3.1 Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Symmetrie. **6 Pkte**

3.2 Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse im Bereich $-2 \le x \le 2$ eingeschlossen wird. **14 Pkte**

Aufgabe 4 — 18 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$y=f(x)=x^2\cdot \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Bestimmen Sie Nullstellen und Extremwerte dieser Funktion.

Aufgabe 5 — 12 Punkte

Gegeben ist eine Parabel mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion im Punkt $P(1, f(1))$.

Aufgabe 6 — 14 Punkte

Ein Fabrikgebäude (Anschaffungswert $R_0 = 280.000{,}00$ €) soll ***degressiv*** abgeschrieben werden.

Bei der degressiven Abschreibung wird der von Jahr zu Jahr abnehmenden Wertminderung dadurch Rechnung getragen, dass über die gesamte Laufzeit ein (festgelegter konstanter) Prozentsatz p von dem jeweiligen aktuellen Buchwert abgeschrieben wird. Der Restbuchwert R_n am Ende eines Jahres n ergibt sich wie folgt:

$$R_n = R_{n-1} - \left(R_{n-1} \cdot \frac{p}{100} \right) = R_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \right), \text{ wobei } n = 1, 2, 3, \ldots$$

6.1 Die Größen $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$ können als Glieder einer Zahlenfolge aufgefasst werden. **2 Pkte**

Um welche Art einer Zahlenfolge handelt es sich dabei?

6.2 Der jährliche Abschreibungssatz für das o. g. Fabrikgebäude betrage $p = 2\,\%$. **6 Pkte**

Berechnen Sie die Restbuchwerte am Ende des 3. Jahres und am Ende des 30. Jahres (jeweils gerundet auf volle Euro).

Zum Vergleich soll nun ***lineare*** Abschreibung vorausgesetzt werden (vgl. Formelsammlung, Abschnitt 6 „Folgen und Reihen“).

6.3 Wie hoch ist der Restbuchwert am Ende des 3. Jahres und am Ende des 30. Jahres, wenn die Abschreibung linear bei einer Nutzungsdauer von $N = 50$ Jahren erfolgt? **6 Pkte**

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Korrekturrichtlinie zur Studienleistung
Wirtschaftsmathematik am 30.04.2005
Wirtschaftsingenieurwesen
WI-WMT-S12 – 050430

Für die Bewertung und Abgabe der Studienleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

18. Mai 2005

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist **unbedingt** einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen eine Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies **unverzüglich** dem Prüfungsamt der Hochschule anzuzeigen (Tel. 040 / 35094311 bzw. birgit.hupe@hamburger-fh.de).

Lösung 1 — vgl. SB 1, Kap. 1.3.6 und 1.4.3 — 16 Punkte

Definitionsbereich: $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$ (2 Pkte)

$$\frac{3x}{x(x-2)} + (x+1) = \frac{7-2x}{x-2}$$ mit dem Hauptnenner $x(x-2)$ multiplizieren

$$3x + (x+1)x(x-2) = (7-2x)x$$ zusammenfassen (1 Pkt)

$$3x + x(x^2 - x - 2) = 7x - 2x^2$$ (1 Pkt)

$$3x + x^3 - x^2 - 2x = 7x - 2x^2$$ (1 Pkt)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$ ausklammern von x (1 Pkt)

$$x(x^2 + x - 6) = 0$$ (1 Pkt)

Daraus folgt

$x = 0$ oder $(x^2 + x - 6) = 0$. (1 Pkt)

$x = 0$ liegt nicht im Definitionsbereich der Gleichung, daher ist $x = 0$ keine Lösung. (1 Pkt)

Lösung der quadratischen Gleichung $(x^2 + x - 6) = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$ (3 Pkte)

Daraus folgt

$x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ (2 Pkte)

$x_1 = 2$ liegt nicht im Definitionsbereich der Gleichung, daher ist $x_1 = 2$ keine Lösung. (1 Pkt)

Damit ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{-3\}$. (1 Pkt)

Lösung 2 — vgl. SB 1, Kap. 1.3.8; SB 7, Kap. 1 und 2.4 — 20 Punkte

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$ (1 Pkt)

$$\int \ln\frac{x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x - \int \ln(x-1)\,\mathrm{d}x$$ (1 Pkt)

Substitution $z = x + 1$ (1 Pkt)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$$ (1 Pkt)

$$\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int \ln z\,\mathrm{d}z$$ (1 Pkt)

$$= z\ln z - z + C$$ (Formelsammlung 20.3, S. 34) (1 Pkt)

$$= (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C$$ (Rücksubstitution) (1 Pkt)

Substitution $z = x - 1$ (1 Pkt)

$\frac{dz}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = dz$ (1 Pkt)

$\int \ln(x-1)\, dx = \int \ln z\, dz$ (1 Pkt)

$= z \ln z - z + C$ (Formelsammlung 20.3, S. 34) (1 Pkt)

$= (x-1)\ln(x-1) - (x-1) + C$ (Rücksubstitution) (1 Pkt)

Zusammenfassen ergibt:

$\int \ln \frac{x+1}{x-1}\, dx = (x+1)\ln(x+1) - (x+1) - \{(x-1)\ln(x-1) - (x-1)\} + C$ (2 Pkte)

$= (x+1)\ln(x+1) - (x+1) - (x-1)\ln(x-1) + (x-1) + C$ (1 Pkt)

$= (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2 + C$ (1 Pkt)

$= \ln(x+1)^{x+1} - \ln(x-1)^{x-1} - 2$ (2 Pkte)

$= \ln \frac{(x+1)^{x+1}}{(x-1)^{x-1}} - 2$ (2 Pkte)

Da eine Stammfunktion zu bestimmen war, wird der Einfachheit halber $C = 0$ angenommen.

Lösung 3 **vgl. SB 4, Kap. 2.3; SB 7, Kap. 2.4 und 4.1.1** **20 Punkte**

3.1 Es ist der Funktionswert $f(-x)$ zu betrachten.

Eine Funktion ist gerade, falls $f(x) = f(-x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich (Formelsammlung 16.2). (1 Pkt)

Eine Funktion ist ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich (Formelsammlung 16.2). (1 Pkt)

$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 + 2} = -\frac{x}{x^2 + 2} = -f(x) \neq f(x)$ (3 Pkte)

Damit ist die Funktion $f(x)$ ungerade (zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung). (1 Pkt)

3.2 Die Funktion $f(x)$ hat genau eine Nullstelle bei $x = 0$. (1 Pkt)

Damit berechnet sich die Fläche wie folgt:

$A = \left| \int_{-2}^{0} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)\, dx \right|.$ (2 Pkte)

Wegen der Punktsymmetrie kann die Fläche auch wie folgt bestimmt werden:

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right| .$$

Bestimmung einer Stammfunktion mittels Substitution

$$z = x^2 + 2 \qquad \text{(1 Pkt)}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{2x} \qquad \text{(1 Pkt)}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{z}\frac{\mathrm{d}z}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(2 Pkte)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| \qquad \text{(Formelsammlung 20.3)} \qquad \text{(1 Pkt)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| \qquad \text{(Rücksubstitution)} \qquad \text{(1 Pkt)}$$

Bestimmung der Fläche:

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right| = 2 \cdot \left| \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| \right|_0^2 = \left|\ln(4+2) - \ln 2\right| \qquad \text{(3 Pkte)}$$

$$= \left|\ln 6 - \ln 2\right| = \ln\frac{6}{2} = \ln 3 \qquad \text{(2 Pkte)}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man bei getrennter Berechnung der Einzelflächen

$$A = \left| \int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right| .$$

Lösung 4 — vgl. SB 5, Kap. 3.5 — 18 Punkte

Nullstellen:

Aus $x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0$ folgt

$x = 0$ oder (1 Pkt)

$\mathrm{e}^{-x} = 0$ (entfällt, da $\mathrm{e}^{-x} > 0$ für alle x). (2 Pkte)

Damit ist $x = 0$ Nullstelle der Funktion $f(x)$. (1 Pkt)

Extremwerte:

Notwendige Bedingung ist $f'(x)=0$, hinreichende Bedingung ist $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$. (1 Pkt)

Bestimmung der ersten Ableitung (Anwendung der Produktregel und Kettenregel):

$f(x)=x^2\cdot \mathrm{e}^{-x}$

$g(x)=x^2 \quad\Rightarrow\quad g'(x)=2x$ (1 Pkt)

$h(x)=\mathrm{e}^{-x} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ (1 Pkt)

$f'(x)=2x\cdot \mathrm{e}^{-x}-x^2\cdot \mathrm{e}^{-x}=(2x-x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x}$ (2 Pkte)

Bestimmung der zweiten Ableitung (Anwendung der Produktregel und Kettenregel):

$f'(x)=(2x-x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x}$

$g(x)=(2x-x^2) \quad\Rightarrow\quad g'(x)=2-2x$ (1 Pkt)

$h(x)=\mathrm{e}^{-x} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ (1 Pkt)

$f''(x)=(2-2x)\cdot \mathrm{e}^{-x}-(2x-x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x}=(2-4x+x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x}$ (2 Pkte)

Notwendige Bedingung:

$f'(x)=(2x-x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x}=0 \quad\Rightarrow\quad (2x-x^2)=0 \quad\Rightarrow\quad x(2-x)=0$ (2 Pkte)

$x(2-x)=0$ für $x_1=0$ oder $x_2=2$ (1 Pkt)

Überprüfung der hinreichenden Bedingung:

$f''(x_1)=f''(0)=2\cdot \mathrm{e}^{-0}>0$, damit liegt in $P(0,0)$ ein <u>lokales Minimum</u> vor. (1 Pkt)

$f''(x_2)=f''(2)=(2-8+4)\cdot \mathrm{e}^{-2}=-2\cdot \mathrm{e}^{-2}<0$, damit liegt im Punkt $P(2, 4\mathrm{e}^{-2})$ ein <u>lokales Maximum</u> vor. (1 Pkt)

Lösung 5 — vgl. SB 4, Kap. 3.1; SB 5, Kap. 1 — 12 Punkte

Der Anstieg der Tangente an den Graph der Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ entspricht dem Wert der ersten Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 (vgl. Formelsammlung 18.1). (3 Pkte)

Bestimmung der ersten Ableitung:

$f(x)=x^2+3x+1$

$f'(x)=2x+3$ (1 Pkt)

Mit $x_0=1$ folgt $f'(x_0)=f'(1)=2\cdot 1+3=5$. (1 Pkt)

Der Anstieg der Tangente im Punkt $P(1, f(1))$ beträgt damit $m=5$. (1 Pkt)

Die Tangente hat mit dem Graphen der Funktion $f(x)$ den Berührungspunkt $P(1, f(1))$ gemeinsam: (2 Pkte)

$f(1)=1^2+3\cdot 1+1=5$. (1 Pkt)

Anwendung der Punktsteigungsform zur Bestimmung der Tangentengleichung (Formelsammlung 16.5):

$$y = mx + (y_0 - mx_0)\,. \qquad \text{(1 Pkt)}$$

Mit $m = 5$, $x_0 = 1$ und $y_0 = f(x_0) = 5$ ergibt sich

$$y = 5x + (5 - 5 \cdot 1) = 5x\,. \qquad \text{(2 Pkte)}$$

Die gesuchte Tangentengleichung lautet damit $y = 5x$.

Lösung 6 — vgl. SB 1; Kap. 2 — 14 Punkte

6.1 Es handelt sich um eine **geometrische** Zahlenfolge, da der Quotient q zwischen zwei Gliedern der Zahlenfolge gleich ist: (2 Pkte)

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = (1 - \frac{p}{100}) = q \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

6.2 $R_0 = 280.000{,}00$ € (1 Pkt)

$$q = \left(1 - \frac{p}{200}\right) = \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0{,}98 \qquad \text{(1 Pkt)}$$

$$R_3 = R_2 \cdot q = R_1 \cdot q \cdot q = R_0 \cdot q \cdot q \cdot q = R_0 \cdot q^3 \qquad \text{(1 Pkt)}$$

$$R_3 = 280.000 \cdot 0.98^3 = 263.534 \text{ €} \qquad \text{(1 Pkt)}$$

Analog ergibt sich für R_{30}:

$$R_{30} = R_0 \cdot q^{30} = 280.000 \cdot 0{,}98^{30} = 152.736 \text{ €} \qquad \text{(2 Pkte)}$$

6.3 Für die lineare Abschreibung gilt (Formelsammlung 6.2):

$$R_n = R_0 - n \cdot \frac{R_0}{N}\,. \qquad \text{(1 Pkt)}$$

Mit $N = 50$ und $d = \frac{R_0}{N} = \frac{280.000}{50} = 5.600$ € ergibt sich: (1 Pkt)

$$R_3 = R_0 - (3 \cdot d) = 280.000 - 3 \cdot 5.600 = 263.200 \text{ €} \qquad \text{(2 Pkte)}$$

$$R_{30} = R_0 - (30 \cdot d) = 280.000 - 30 \cdot 5.600 = 112.000 \text{ €}. \qquad \text{(2 Pkte)}$$