Klausur – Aufgaben

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH ·
UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Studiengang	**Betriebswirtschaft**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Studienleistung**
Klausur-Knz.	**BW-WMT-S12–040508**
Datum	**08.05.2004**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtführenden **zur Verfügung gestellte Papier** und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Bögen) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei nummerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Anzahl Aufgaben:	- 8 -
Höchstpunktzahl:	- 100 -

Hilfsmittel :
HFH-Taschenrechner Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

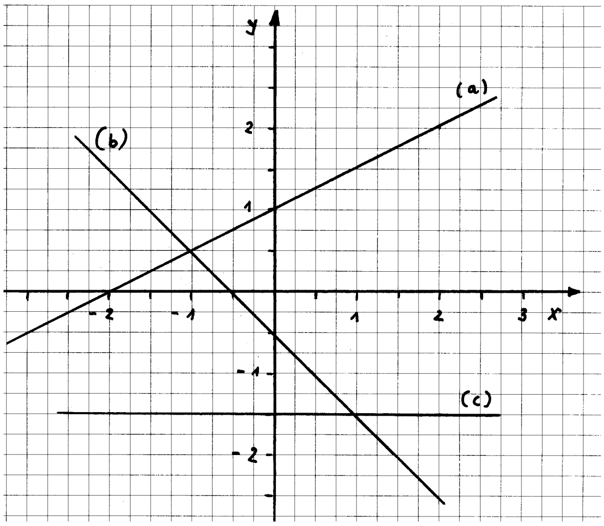
Vorläufiges Bewertungsschema:

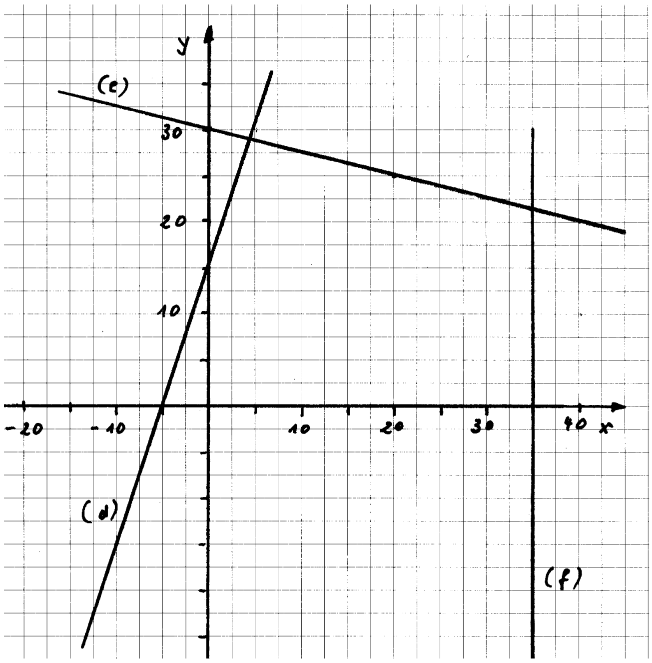
Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 — 12 Punkte

Geben Sie zu den in den beiden folgenden x, y-Koordinatensystemen dargestellten Geraden (a) bis (f) jeweils die Geradengleichung (Funktionsgleichung) an.





Aufgabe 2 — 14 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|5x-8|>2$$

im Bereich der reellen Zahlen.

Aufgabe 3 — 13 Punkte

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{5}{2}$$

mit $D=\mathbf{R}$.

Aufgabe 4 16 Punkte

4.1 Bestimmen Sie im Bereich der reellen Zahlen die größtmöglichen Definitionsbereiche der Funktionen **6 Pkte**

$$f(x)=\frac{2x^2-8x-10}{x^2+1} \text{ und } g(x)=\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2x-3)}.$$

4.2 Vorgegeben sind drei Funktionen: **10 Pkte**

$$f(x)=\sqrt{x}\ ;\ g(x)=\ln x \text{ und } h(x)=\mathrm{e}^x .$$

Bestimmen Sie

a) $f(g(h(x)))$ sowie

b) $h(g(f(x)))$.

Vereinfachen Sie dabei die Ausdrucke so weit wie möglich.

Aufgabe 5 10 Punkte

Frau S. legt am 31.09.2004 einen Geldbetrag von 15000 € auf einem Sparbuch mit einer Verzinsung von $p=3\,\%$ p.a. an. Zinszuschlagtermin ist jeweils der 31.12. eines Jahres.

Berechnen Sie den Betrag, auf den das Kapital am 25.03.2008 angewachsen ist.

(Anwendung der deutschen Zinsmethode mit 30 Zinstagen pro Monat und 360 Zinstagen pro Jahr.)

Hinweis: Die Zeiträume in 2004 und 2008 sind als unvollständige Zinsperioden zu betrachten.

Aufgabe 6 17 Punkte

Herr P. besitzt auf seinem Bankkonto, das mit 3,2 % p.a. verzinst wird, am 01.01.2004 ein Guthaben von 42000 €. Er möchte jedes Jahr am 01. Januar, beginnend im Jahre 2005, 3000 € abheben.

6.1 Berechnen Sie die Anzahl der abzuhebenden Raten, bis das Konto erschöpft ist. **11 Pkte**

6.2 Berechnen Sie den Kontostand von Herrn P. nach der dritten Abhebung. **6 Pkte**

Aufgabe 7 12 Punkte

Frau W. erhält ein Monatsgehalt von 3600 € (netto, Auszahlungsbetrag). Berechnen Sie die hierzu äquivalente **Jahresersatzrate** bei einer Verzinsung von $p=3{,}8\ \%$, wenn

7.1 das Gehalt jeweils am Monatsersten überwiesen wird. **6 Pkte**

7.2 das Gehalt jeweils am Monatsende überwiesen wird. **6 Pkte**

Aufgabe 8 6 Punkte

Frau B. möchte einen Kredit aufnehmen und könnte durch konsequente Einsparungen monatlich 200 € für Zinsen und Tilgung aufbringen. Ihre Freundin bietet ihr einen Kredit mit einer Verzinsung von 1,1 % pro Monat an.

Berechnen Sie den Kreditbetrag, den sich Frau B. von ihrer Freundin leihen könnte, wenn der Kredit nach 3,5 Jahren zurückgezahlt sein soll.

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH ·
UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Korrekturrichtlinie zur Studienleistung
Wirtschaftsmathematik am 08.05.2004
Betriebswirtschaft
BW-WMT-S12 – 040508

Für die Bewertung und Abgabe der Studienleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Ergebnis
von	bis einschl.	
50	100	**bestanden**
0	49,5	**nicht** bestanden

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

26. Mai 2004

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 — vgl. SB 4; Kap. 1.2 und 3.1 — 12 Punkte

Gleichungen der Geraden:

(a)	$y = f(x) = 0{,}5x + 1$	(d)	$y = f(x) = 3x + 15$	(je Gerade 2 Pkte, max. 12 Pkte)
(b)	$y = f(x) = -x - 0{,}5$	(e)	$y = f(x) = -0{,}25x + 30$	
(c)	$y = f(x) = -1{,}5$	(f)	$x = 35$	

Lösung 2 — vgl. SB 1; Kap. 1.5.2 — 14 Punkte

1. Fall: $5x - 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1{,}6$ (2 Pkte)

$5x - 8 > 2$

$x > 2$ (2 Pkte)

$L_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\}$ (2 Pkte)

2. Fall: $5x - 8 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1{,}6$ (2 Pkte)

$-5x + 8 > 2$

$5x < 6$

$x < 1{,}2$ (2 Pkte)

$L_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1{,}2\}$ (2 Pkte)

Gesamte Lösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1{,}2 \vee x > 2\}$. (2 Pkte)

Lösung 3 — vgl. SB 1; Kap. 1.4.4 — 13 Punkte

Die Nullstellen entsprechen der Schnittpunkten der Funktion mit der x-Achse, d. h. Bestimmung aller $x \in D$ mit $f(x) = 0$.

$$\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2} = 0$$

Die biquadratische Gleichung lässt sich durch Substitution auf eine quadratische Gleichung zurückführen.

Setze $x^2 = z$. (2 Pkte)

Aus $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{2} = 0$ wird damit $\frac{1}{2}z^2 - 3z + \frac{5}{2} = 0$. (1 Pkt)

Lösen der quadratischen Gleichung $z^2 - 6z + 5 = 0$. (1 Pkt)

Anwendung der binomischen Formeln ergibt

$$(z-1)\cdot(z-5) = 0$$

mit den Lösungen $\underline{\underline{z_1 = 1}}$ oder $\underline{\underline{z_2 = 5}}$. (4 Pkte)

Gleiche Lösungen erhält man alternativ durch Anwendung der *p, q*-Formel auf $z^2 - 6z + 5 = 0$:

$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{20}{4}} = 3 \pm \sqrt{\frac{16}{4}} = 3 \pm 2.$$

<u>Rücksubstitution:</u>

$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ (2 Pkte)

$x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \sqrt{5}$ und $x_4 = -\sqrt{5}$ (2 Pkte)

Damit ist die Lösungsmenge: $L = \{-\sqrt{5}\,;\ -1\,;\ 1\,;\ +\sqrt{5}\}$. (1 Pkt)

Lösung 4 — vgl. SB 4; Kap. 3.3 und 3.7.2 — 16 Punkte

4.1 Definitionsbereich — 6 Pkte

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 + 1}$$

Der Nenner kann in **R** nicht Null werden. (1 Pkt)

Für den größtmögliche Definitionsbereich gilt damit: $D = \mathbf{R}$. (1 Pkt)

$$g(x) = \frac{3x+1}{(x+1)(x^2+2x-3)}$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners:

Aus $(x+1)(x-1)(x+3) = 0$ folgt (Anwendung binomische Formeln):

$x_1 = -1\ ;\ x_2 = +1\ ;\ x_3 = -3$. (3 Pkte)

Die Nullstellen x_2 und x_3 erhält man auch alternativ durch Anwendung der *p*, *q*-Formel auf $(x^2 + 2x - 3)$.

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{12}{4}} = -1 \pm 2.$$

Damit gilt für den größtmöglichen Definitionsbereich: $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\,;\ +1\,;\ -3\}$ (1 Pkt)

4.2 Verkettete Funktionen **10 Pkte**

a) $g(h(x)) = \ln\left(e^x\right)$ (1 Pkt)

und damit $f(g(h(x))) = \sqrt{\ln\left(e^x\right)} = \sqrt{x \cdot \ln(e)} = \sqrt{x}$ (4 Pkte)

b) $g(f(x)) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$ (1 Pkt)

und damit $h(g(f(x))) = e^{\ln\left(\sqrt{x}\right)} = \sqrt{x}$ (4 Pkte)

Lösung 5 vgl. SB 2; Kap. 1.3 10 Punkte

Im ersten unvollständigen Jahr 2004 und im letzten ebenfalls unvollständigen Jahr 2008 erfolgt die Verzinsung einfach. Für die dazwischen liegenden Jahre 2005 bis 2007 wird dagegen die Zinseszinsrechnung angewendet.

Aufschlüsselung der Tage:

31.09.2004 – 31.12.2004	90 Tage: einfache Verzinsung	(2 Pkte)
01.01.2005 – 31.12.2007	3 Jahre: Zinseszinsen	(2 Pkte)
01.01.2008 – 25.03.2008	85 Tage: einfache Verzinsung	(2 Pkte)

Dies führt zu (vgl. Formelsammlung 8.1/8.2):

$$K_{\text{ges}} = 15.000 \cdot \left(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}03\right) \cdot 1{,}03^3 \cdot \left(1 + \frac{85}{360} \cdot 0{,}03\right) = 16.630{,}81 \text{ €}. \quad (4 \text{ Pkte})$$

Am 25.03.2008 ist das Kapital auf 16.630,81 € angewachsen.

Lösung 6 vgl. SB 2; Kap. 2.4 17 Punkte

6.1 Anzahl der Raten, bis das Konto erschöpft ist **11 Pkte**

Sparkassenformel für den Kapitalabbau bei nachschüssig entnommenen Raten mit $E_n = 0$ (vgl. Formelsammlung 9.3):

$$0 = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (2 \text{ Pkte})$$

Umstellen nach der Periode n ergibt:

$$n = \frac{\log\left[\frac{r}{r - K_0(q-1)}\right]}{\log q}. \quad (4 \text{ Pkte})$$

Einsetzen von $K_0 = 42.000$ €; $q = 1{,}032$ und $r = 3.000$ € liefert:

$$n = \frac{\log\left[\frac{3.000}{3.000 - 42.000(1{,}032 - 1)}\right]}{\log(1{,}032)} \quad (2 \text{ Pkte})$$

$$n = 18{,}86\,.$$ (2 Pkte)

Es können 18 volle Raten und eine verminderte 19-te Schlussrate abgehoben werden. (1 Pkt)

6.2 Kontostand nach der dritten Abhebung **6 Pkte**

Sparkassenformel für den Kapitalabbau bei <u>nachschüssig</u> entnommenen Raten (vgl. Formelsammlung 9.3):

$$E_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$ (2 Pkte)

Einsetzen von $K_0 = 42.000\,€$; $q = 1{,}032$; $r = 3.000\,€$ und $n = 3$ liefert:

$$E_n = 42.000\,€ \cdot 1{,}032^3 - 3.000\,€ \cdot \frac{1.032^3 - 1}{1.032 - 1}$$ (2 Pkte)

$$E_n = 36.871{,}33\,€.$$ (2 Pkte)

Der Kontostand nach der dritten Abhebung beträgt $36.871{,}33\,€$.

Lösung 7 vgl. SB 3, Kap. 1.1 12 Punkte

7.1 Überweisung am Monatsersten **6 Pkte**

Bei <u>vorschüssigen</u> Ratenzahlungen gilt für die äquivalente Jahresersatzrate $\bar{r}_E$ nach Formelsammlung 9.4:

$$\bar{r}_E = r \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m+1) \right].$$ (2 Pkte)

Einsetzen von $r = 3.600\,€$; $i = 0{,}038$ und $m = 12$ liefert:

$$\bar{r}_E = 3.600 \cdot \left[12 + \frac{0{,}038}{2}(12+1) \right] €$$ (2 Pkte)

$$\bar{r}_E = 44.089{,}20\,€.$$ (2 Pkte)

7.2 Überweisung am Monatsende **6 Pkte**

Bei <u>nachschüssigen</u> Ratenzahlungen gilt für die äquivalente Jahresersatzrate $\bar{r}_E$ nach Formelsammlung 9.4:

$$\bar{r}_E = r \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m-1) \right].$$ (2 Pkte)

Einsetzen von $r = 3.600\,€$; $i = 0{,}038$; $m = 12$ liefert:

$$\bar{r}_E = 3.600 \cdot \left[12 + \frac{0{,}038}{2}(12-1) \right] €$$ (2 Pkte)

$$\bar{r}_E = 43.952{,}40\,€.$$ (2 Pkte)

Lösung 8 — vgl. SB 3; Kap. 2.3 — 6 Punkte

Die Frage nach der Kredithöhe bei vorgegebener Annuität (Tilgung plus Zinsen) kann durch Umstellen der Formel für die Annuität beantwortet werden.

Durch Umformen von $A = S \cdot q^n \frac{q-1}{q^n - 1}$ (vgl. Formelsammlung 10.2) erhält man:

$$S = A \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}.$$ (3 Pkte)

(Formel kann durch Umstellen entwickelt werden oder auch direkt der Formelsammlung, 10.2 entnommen sein.)

Einsetzen von $A = 200$ € ; $q = 1{,}011$ und $n = 42$ (3,5 Jahre a 12 Monate) liefert:

$$S = 200 \cdot \frac{1{,}011^{42} - 1}{1{,}011^{42}(1{,}011 - 1)} \text{ €}$$ (2 Pkte)

$$S = 6.697{,}93 \text{ €}.$$ (1 Pkt)

Frau B. kann sich von ihrer Freundin 6.697,93 € leihen.