Klausur – Aufgaben

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Studiengang	**Betriebswirtschaft**
Fach	**Wirtschaftsmathematik**
Art der Leistung	**Prüfungsleistung**
Klausur-Knz.	**BW-WMT-P12–030628**
Datum	**28.06.2003**

Bezüglich der Anfertigung Ihrer Arbeit sind folgende Hinweise verbindlich:

- Verwenden Sie ausschließlich das vom Aufsichtsführenden **zur Verfügung gestellte Papier**, und geben Sie sämtliches Papier (Lösungen, Schmierzettel und nicht gebrauchte Blätter) zum Schluss der Klausur wieder bei Ihrem Aufsichtsführenden ab. Eine nicht vollständig abgegebene Klausur gilt als nicht bestanden.
- Beschriften Sie jeden Bogen mit Ihrem **Namen und Ihrer Immatrikulationsnummer**. Lassen Sie bitte auf jeder Seite 1/3 ihrer Breite als Rand für Korrekturen frei, und nummerieren Sie die Seiten fortlaufend. Notieren Sie bei jeder Ihrer Antworten, auf welche Aufgabe bzw. Teilaufgabe sich diese bezieht.
- Die Lösungen und Lösungswege sind in einer für den Korrektanten **zweifelsfrei lesbaren Schrift** abzufassen. Korrekturen und Streichungen sind eindeutig vorzunehmen. Unleserliches wird nicht bewertet.
- Bei nummerisch zu lösenden Aufgaben ist außer der Lösung stets der **Lösungsweg anzugeben**, aus dem eindeutig hervorzugehen hat, wie die Lösung zustande gekommen ist.
- Zur Prüfung sind bis auf Schreib- und Zeichenutensilien ausschließlich die nachstehend genannten Hilfsmittel zugelassen. Werden **andere als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet oder Täuschungsversuche** festgestellt, gilt die Prüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 5 bewertet.

Hilfsmittel :
HFH-Taschenrechner
Formelsammlung Wirtschaftsmathematik

Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Anzahl Aufgaben:	- 8 -
Höchstpunktzahl:	- 100 -

Vorläufiges Bewertungsschema:

Punktzahl von	Punktzahl bis einschl.	Note	
95	100	1,0	sehr gut
90	94,5	1,3	sehr gut
85	89,5	1,7	gut
80	84,5	2,0	gut
75	79,5	2,3	gut
70	74,5	2,7	befriedigend
65	69,5	3,0	befriedigend
60	64,5	3,3	befriedigend
55	59,5	3,7	ausreichend
50	54,5	4,0	ausreichend
0	49,5	5,0	nicht ausreichend

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 insg. 14 Punkte

Gegeben sind die folgenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 6x + 8},\ D = \mathbf{R} \setminus \{-4, -2\}$$

$$g(x) = \frac{x-3}{x+2},\ D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$$

Leiten Sie die Funktionen je einmal ab und erklären Sie, warum die Terme der Ableitungen übereinstimmen.

Aufgabe 2 insg. 10 Punkte

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente (die Tangente im Wendepunkt) für die Funktion

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 29x + 35,\ D = \mathbf{R}.$$

Aufgabe 3 insg. 8 Punkte

Die Kostenfunktion einer Produktion sei

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 29x + 35,\ D = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\},$$

wobei x die Stückzahl in Einheiten (E) und $K(x)$ die Kosten in Geldeinheiten (GE) bezeichnen.

3.1 Bei welcher Produktionszahl liegt ein Minimum der Grenzkosten vor? **4 Pkte**

3.2 Welche Kostenerhöhung fällt an, wenn man die Produktion von 3 E auf 4 E erhöht? **4 Pkte**

Aufgabe 4 insg. 14 Punkte

Ist die Änderung der Kosten ΔK bei der Kostenfunktion

$K(x) = 2x^2 e^{40-x}$ [x Stückzahl in Einheiten (E) und $K(x)$ Kosten in Geldeinheiten (GE)]

bei einer Steigerung der Produktion Δx von 42 E auf 42,1 E näherungsweise kleiner als 40 GE?

Überprüfen Sie das Ergebnis mit einer exakten Berechnung.

Aufgabe 5 insg. 16 Punkte

Ein Hersteller von Taschencomputern stellt zwei Modelle mit einem Intel-Prozessor her.

Die Preisabsatzfunktionen der beiden Geräte lauten – wobei x für Anzahl der Geräte des Typs I und y für die Anzahl der Geräte des Typs II stehen:

$$p_1(x) = 900 - 6{,}25x$$

$$p_2(y) = 1000 - 2{,}5y\,.$$

Die Kostenfunktion hängt von beiden Stückzahlen ab und ist in dieser Weise bekannt:

$$K(x, y) = 682{,}5x + 872{,}5y + 15{,}5xy + 700\,.$$

Kann man x und y so bestimmen, dass der Hersteller einen maximalen Gewinn erzielt ?

Aufgabe 6 insg. 10 Punkte

In einem chemischen Betrieb werden an **4** Apparateeinheiten die Mitarbeiter (MA) in **5** Lohngruppen entlohnt.

Apparateeinheit 1:

Anzahl MA	Lohngruppe
1	1
3	4
2	5

Apparateeinheit 2:

Anzahl MA	Lohngruppe
2	2
1	3
1	5

Apparateeinheit 3:

Anzahl MA	Lohngruppe
3	1
2	3
2	4

Apparateeinheit 4:

Anzahl MA	Lohngruppe
1	1
1	2
3	5

In der Lohngruppe 1 wird 7,20 € je Stunde gezahlt, in der Lohngruppe 2 wird 7,95 € je Stunde gezahlt, in der Lohngruppe 3 wird 8,35 € je Stunde gezahlt, in der Lohngruppe 4 wird 8,80 € je Stunde gezahlt und in der Lohngruppe 5 wird 9,50 € je Stunde gezahlt.

6.1 Stellen Sie die Matrix der Mitarbeiterzahlen auf, die den Apparateeinheiten die Lohngruppen zuordnet (Lohnmatrix). **3 Pkte**

6.2 Stellen Sie den Vektor der Löhne je Lohngruppe auf. **1 Pkt**

6.3 Berechnen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung die Gesamtlohnkosten für eine Stunde. **6 Pkte**

Aufgabe 7 insg. 11 Punkte

Ein Betrieb hat die Möglichkeit, kurzfristig aus drei Abfallstoffen A_1, A_2 und A_3 drei Produkte P_1, P_2 und P_3 zusätzlich zu erzeugen, deren Reingewinn je Einheit der Produkte für P_1 10 €, für P_2 6 € und für P_3 4 € beträgt.

Es ist zu berechnen, in welcher Anzahl die Produkte hergestellt werden müssen, damit der Reingewinn für dieses Zusatzprogramm möglichst groß ist. Die Verbrauchsnormen und die vorhandenen Kapazitäten sind der untenstehenden Tabelle zu entnehmen.

Material	Verbrauchsnormen			Vorhandene Menge
	P_1	P_2	P_3	
A_1	2	1	6	300
A_2	6	5	1	540
A_3	4	2	4	320

7.1 Erstellen Sie das zugehörige System von Ungleichungen und geben Sie die Zielfunktion an. **5 Pkte**

Bezeichnen Sie die Stückzahlen für P_1 mit x_1, die Stückzahlen für P_2 mit x_2 und die Stückzahlen für P_3 mit x_3.

7.2 Entwickeln Sie ein geeignetes System von Gleichungen und daraus eine beschriftete Tabelle, damit man die Aufgabe mit dem Simplex-Algorithmus bearbeiten kann – **nicht ausrechnen!** **5 Pkte**

7.3 Berechnen Sie den Reingewinn, wenn Sie wissen, dass die Lösung $\{(65, 30; 0)\}$ ist. **1 Pkt**

Aufgabe 8 insg. 17 Punkte

Bestimmen Sie graphisch die Menge aller Zahlenpaare, die das folgende Ungleichungssystem erfüllen:

(1) $x + 2y \leq 16$

(2) $6x + 5y \leq 60$

(3) $y \leq 7$

(4) $x \geq 0$

(5) $y \geq 0$.

HAMBURGER · FERN-HOCHSCHULE · HFH ·
UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Korrekturrichtlinie zur Prüfungsleistung
Wirtschaftsmathematik am 28.06.2003
Betriebswirtschaft
BW-WMT-P12 – 030628

Für die Bewertung und Abgabe der Prüfungsleistung sind folgende Hinweise verbindlich:

- Die Vergabe der Punkte nehmen Sie bitte so vor, wie in der Korrekturrichtlinie ausgewiesen. Eine summarische Angabe von Punkten für Aufgaben, die in der Korrekturrichtlinie detailliert bewertet worden sind, ist nicht gestattet.
- Nur dann, wenn die Punkte für eine Aufgabe nicht differenziert vorgegeben sind, ist ihre Aufschlüsselung auf die einzelnen Lösungsschritte Ihnen überlassen.
- Stoßen Sie bei Ihrer Korrektur auf einen anderen richtigen als den in der Korrekturrichtlinie angegebenen Lösungsweg, dann nehmen Sie bitte die Verteilung der Punkte sinngemäß zur Korrekturrichtlinie vor.
- Rechenfehler sollten grundsätzlich nur zur Abwertung des betreffenden Teilschrittes führen. Wurde mit einem falschen Zwischenergebnis richtig weitergerechnet, so erteilen Sie die hierfür vorgesehenen Punkte ohne weiteren Abzug.
- Ihre Korrekturhinweise und Punktbewertung nehmen Sie bitte in einer zweifelsfrei lesbaren Schrift vor.
- Die von Ihnen vergebenen Punkte und die daraus sich gemäß dem nachstehenden Notenschema ergebende Bewertung tragen Sie in den Klausur-Mantelbogen sowie in das Formular „Klausurergebnis“ (Ergebnisliste) ein.
- Gemäß der Diplomprüfungsordnung ist Ihrer Bewertung folgendes Bewertungsschema zugrunde zu legen:

Punktzahl		Note	
von	bis einschl.		
95	100	1,0	sehr gut
90	94,5	1,3	sehr gut
85	89,5	1,7	gut
80	84,5	2,0	gut
75	79,5	2,3	gut
70	74,5	2,7	befriedigend
65	69,5	3,0	befriedigend
60	64,5	3,3	befriedigend
55	59,5	3,7	ausreichend
50	54,5	4,0	ausreichend
0	49,5	5,0	nicht ausreichend

- Die korrigierten Arbeiten reichen Sie bitte spätestens bis zum

16. Juli 2003

in Ihrem Studienzentrum ein. Dies muss persönlich oder per Einschreiben erfolgen. Der angegebene Termin ist unbedingt einzuhalten. Sollte sich aus vorher nicht absehbaren Gründen ein Terminüberschreitung abzeichnen, so bitten wir Sie, dies unverzüglich Ihrem Studienzentrenleiter anzuzeigen.

Lösung 1 vgl. SB 5, Kap. 3 insg. 14 Punkte

$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	Erkennen der Quotientenregel	(1 Pkt)
$u(x) = x^2 + x - 12$, $u'(x) = 2x + 1$, $v(x) = x^2 + 6x + 8$, $v'(x) = 2x + 6$	Bilden der Ableitungen	(2 Pkte)
$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+6x+8) - (x^2+x-12)(2x+6)}{(x^2+6x+8)^2} =$	Einsetzen	(1 Pkt)
$\frac{2x^3+13x^2+22x+8-(2x^3+8x^2-18x-72)}{(x^2+6x+8)^2} = \frac{5x^2+40x+80}{(x^2+6x+8)^2} = \frac{5(x^2+8x+16)}{(x^2+6x+8)^2} =$	Vereinfachen	(2 Pkte)
$\frac{5(x+4)^2}{((x+4)(x+2))^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$	Faktorisieren	(2 Pkte)
$g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	Erkennen der Quotientenregel	(1 Pkt)
$u(x) = x - 3$, $u'(x) = 1$, $v(x) = x + 2$, $v'(x) = 1$	Bilden der Ableitungen	(1 Pkt)
$g'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$	Einsetzen	(2 Pkte)

Wenn man $f(x)$ durch $(x+4)$ kürzt, stimmt die Terme von $f(x)$ und $g(x)$ überein (somit auch gleiche Terme der Ableitungen). Die Definitionsbereiche von $f(x)$ und $g(x)$ stimmen bis auf die Lücke $x = -4$ überein. (2 Pkte)

Lösung 2 vgl. SB 5, Kap. 4 und SB 4, Kap. 4.1 insg. 10 Punkte

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 29$	Erste Ableitung	(1 Pkt)
$f''(x) = -6x + 18$ $f'''(x) = -6$	Zweite und dritte Ableitung	(1 Pkt)
Wendepunkt: $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$	Bedingung Wendepunkt	(1 Pkt)
$-6x_W + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 3$	Nullstellen 2. Ableitung	(1 Pkt)
$f(3) = 2$	Funktionswert	(1 Pkt)
$W = (3, 2)$ und $f'''(3) = -6 \neq 0$	Prüfung, ob Wendepunkt	(1 Pkt)
Steigung im Wendepunkt: $f'(3) = -2$	Steigung berechnen	(1 Pkt)
Tangentengleichung $y = mx + b$, wobei $m = -2$ und $W = (3, 2)$ auf der Tangente liegt.	Geradenansatz	(1 Pkt)
$2 = -2 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = 8$	Einsetzen	(1 Pkt)
Tangentengleichung: $y = -2x + 8$.	Gleichung	(1 Pkt)

Lösung 3	**vgl. SB 5, Kap. 4 und SB 7; Kap. 5.5.1**	**insg. 8 Punkte**

3.1 **4 Pkte**

Grenzkostenfunktion von $K(x)$ ist $K'(x)$		
Minimum der Grenzkosten liegt vor, wenn $K''(x)=0$ und $K'''(x)>0$	Bedingung für Minimum	(1 Pkt)
$K'(x)=3x^2-18x+29$ $K''(x)=6x-18$ $K'''(x)=6$	Ableitungen bilden	(2 Pkte)
$K''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x-18=0 \quad \Rightarrow \quad x_{\min}=3$ Aus $K'''(3)=6>0$ folgt Minimum der Grenzkosten.	Bestimmung der Nullstelle und Prüfung, ob Minimum	(1 Pkt)

3.2 **4 Pkte**

Weg 1:

$K(4)-K(3)=71-68=3$ Kostenerhöhung um 3 GE	Einsetzen der Werte in $K(x)$ und Differenzbildung	(4 Pkte)

Weg 2:

$\int_3^4 \left(3x^2-18x+29\right)dx = \left[x^3-9x^2+29x\right]_3^4$ $=71-68=3$ Kostenerhöhung um 3 GE	Bestimmtes Integral der Grenzkostenfunktion (vgl. SB 7, S. 44)	(4 Pkte)

Lösung 4	**vgl. SB 5, Kap. 2 und Kap. 3**	**insg. 14 Punkte**

$\Delta K = K'(42)\cdot(42{,}1-42) = \frac{K'(42)}{10}$	Ansatz über Differential (geometrische Interpretation)	(2 Pkte)
$u(x) = 2x^2$, $u'(x) = 4x$, $v(x) = \mathrm{e}^{40-x}$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{40-x}$	Erkennen Produktregel und Bildung der Ableitungen, bei $v(x)$ ist die Kettenregel zu beachten	(4 Pkte)
$K'(x) = 4x\cdot\mathrm{e}^{40-x} + 2x^2\cdot(-\mathrm{e}^{40-x})$ $= 2x\cdot\mathrm{e}^{40-x}(2-x)$	Ableitung von $K(x)$	(3 Pkte)
$K'(42) = -\frac{3360}{\mathrm{e}^2} = -454{,}73$	Wert ausrechnen	(1 Pkt)
$\Delta K = \frac{K'(42)}{10} = \frac{-454{,}73}{10} = -45{,}47$	Wert ausrechnen	(1 Pkt)
Die Kostenänderung ist somit näherungsweise größer als 40 GE.		(1 Pkt)
Überprüfung: $K(42{,}1) - K(42) = 434{,}09 - 477{,}46 = -43{,}37$	Einsetzen der Werte	(2 Pkte)

Lösung 5 — vgl. SB 9, Kap. 2.4 — insg. 16 Punkte

Erlösfunktion für Typ I: $E_1(x) = p_1(x)\cdot x = (900 - 6{,}25x)x = -6{,}25x^2 + 900x$	Erlösfunktion bestimmen	(1 Pkt)
Erlösfunktion für Typ II: $E_2(y) = p_2(y)\cdot y = (1000 - 2{,}5y)y = -2{,}5y^2 + 1000y$	Erlösfunktion bestimmen	(1 Pkt)
Gewinnfunktion: $G(x,y) = E_1(x) + E_2(x) - K(x,y)$ $G(x,y) = -6{,}25x^2 - 2{,}5y^2 + 900x + 1000y - \left(682{,}5x + 872{,}5y + 15{,}5xy + 700\right)$	Gewinnfunktion bestimmen	(1 Pkt)
$G(x,y) = -6{,}25x^2 - 2{,}5y^2 + 217{,}5x + 127{,}5y - 15{,}5xy - 700$	Gewinnfunktion berechnen	(2 Pkte)
1. $G_x(x,y) = 0$ und $G_y(x,y) = 0$ 2. $G_{xx}(x,y)\cdot G_{yy}(x,y) - \left(G_{xy}(x,y)\right)^2 > 0$	Extremalbedingungen	(1 Pkt)
$G_x(x,y) = -12{,}5x + 217{,}5 - 15{,}5y$ $G_y(x,y) = -5y + 127{,}5 - 15{,}5x$	Partielle Ableitung	(2 Pkte)
$12{,}5x + 15{,}5y = 217{,}5$ $15{,}5x + 5y = 127{,}5 \quad \cdot(-3{,}1)$	Aufstellen Gleichungssystem	(1 Pkt)
$12{,}5x + 15{,}5y = 217{,}5$ $-48{,}05x - 15{,}5y = -395{,}25$ $-35{,}55x = -177{,}75$ $x = 5$ $12{,}5\cdot 5 + 15{,}5y = 217{,}5$ $y = 10$ Stationärer Punkt: $P(x,y) = (5,10)$	Lösen Gleichungssystem	(4 Pkte)
$G_{xx}(x,y) = -12{,}5$ $G_{yy}(x,y) = -5$ $G_{xy}(x,y) = -15{,}5$	Partielle Ableitungen	(1 Pkt)
$G_{xx}(x,y)\cdot G_{yy}(x,y) - \left(G_{xy}(x,y)\right)^2 =$ $(-12{,}5)\cdot(-5) - (-15{,}5)^2 = -177{,}75 < 0$	Extremalbedingung prüfen	(1 Pkt)
Damit ist $P(x,y) = (5,10)$ ein Sattelpunkt und es kann **kein** Maximum gefunden werden.		(1 Pkt)

Lösung 6 vgl. SB 6, Kap. 2 insg. 10 Punkte

6.1 **3 Pkte**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix erstellen;
Zeilenindex: Apparateeinheit;
Spaltenindex: Lohngruppe;
a_{ij} : Anzahl der Mitarbeiter aus Apparateeinheit i mit der Lohngruppe j (3 Pkte)

6.2 **1 Pkt**

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ 7{,}95 \\ 8{,}35 \\ 8{,}8 \\ 9{,}5 \end{pmatrix}$$

Vektor erstellen (1 Pkt)

6.3 **6 Pkte**

$$\begin{array}{ccccc|c} & & & & & 7{,}20 \\ & & & & & 7{,}95 \\ & & & & & 8{,}35 \\ & & & & & 8{,}80 \\ - & - & - & - & - & 9{,}50 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 52{,}60 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 33{,}75 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 55{,}90 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 43{,}65 \end{array}$$

Anwendung des Schema von FALK (5 Pkte)

Einzelergebnisse:

$$1 \cdot 7{,}20 + 3 \cdot 8{,}80 + 2 \cdot 9{,}50 = 52{,}60$$
$$2 \cdot 7{,}95 + 1 \cdot 8{,}35 + 1 \cdot 9{,}50 = 33{,}75$$
$$3 \cdot 7{,}20 + 2 \cdot 8{,}35 + 2 \cdot 8{,}80 = 55{,}90$$
$$1 \cdot 7{,}20 + 1 \cdot 7{,}95 + 3 \cdot 9{,}50 = 43{,}65$$

Gesamtlohn:

$$52{,}60 + 33{,}75 + 55{,}90 + 43{,}65 = 185{,}90 \text{ €}$$

Endergebnis (1 Pkt)

Lösung 7 vgl. SB 10, Kap. 2 insg. 11 Punkte

7.1 **5 Pkte**

I. Nichtnegativität — Bedingungen und Zielfunktion

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ (1 Pkt)

II. Restriktionen

$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 300$

$6x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 540$ (3 Pkte)

$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 320$

III. Zielfunktion

$Z = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \text{Max}$ (1 Pkt)

7.2 **5 Pkte**

Schlupfvariablen einführen

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 6x_3 + y_1 &= 300 \\
6x_1 + 5x_2 + x_3 + y_2 &= 540 \\
4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_3 &= 320 \\
-10x_1 - 6x_2 - 4x_3 + Z &= 0
\end{aligned}$$

(2 Pkte)

Schema (Tableau): (3 Pkte)

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	Z	b_i	q_i
y_1	2	1	6	1	0	0	0	300	
y_2	6	5	1	0	1	0	0	540	
y_3	4	2	4	0	0	1	0	320	
Z	–10	–6	–4	0	0	0	1	0	

7.3 **1 Pkt**

$Z = 10 \cdot 65 + 6 \cdot 30 + 0 = 830$ € — Berechnung Reingewinn (1 Pkt)

Lösung 8 vgl. SB 10, Kap. 2 insg. 17 Punkte

Aufstellen der Geradengleichungen:

(1) $y=-\frac{1}{2}x+8$ (2 Pkte)

Schnittpunkte mit den Achsen (0; 8) und (16; 0) (2 Pkte)

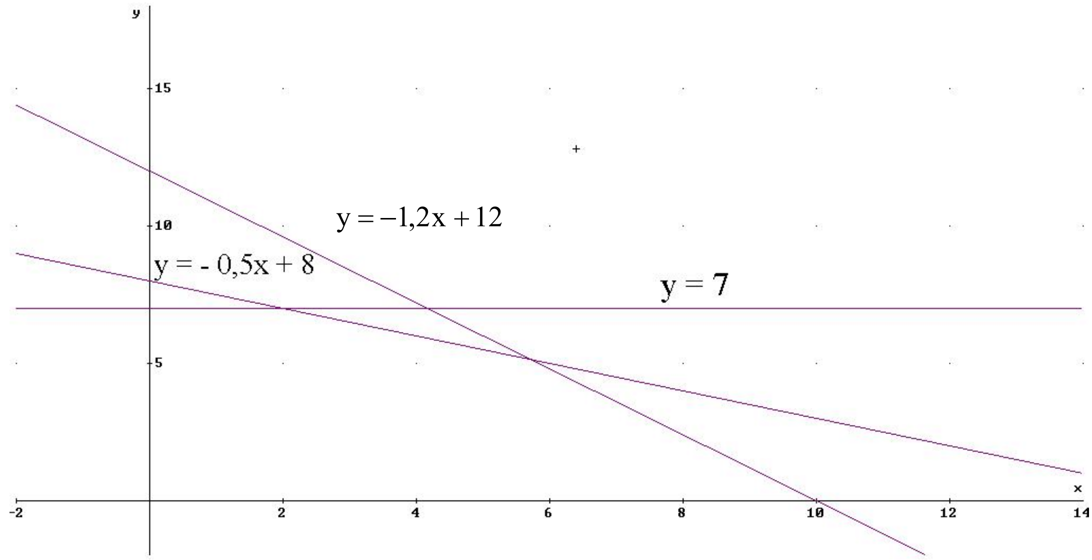
(2) $y=-\frac{6}{5}x+12$ (2 Pkte)

Schnittpunkte mit den Achsen (0; 12) und (10; 0) (2 Pkte)

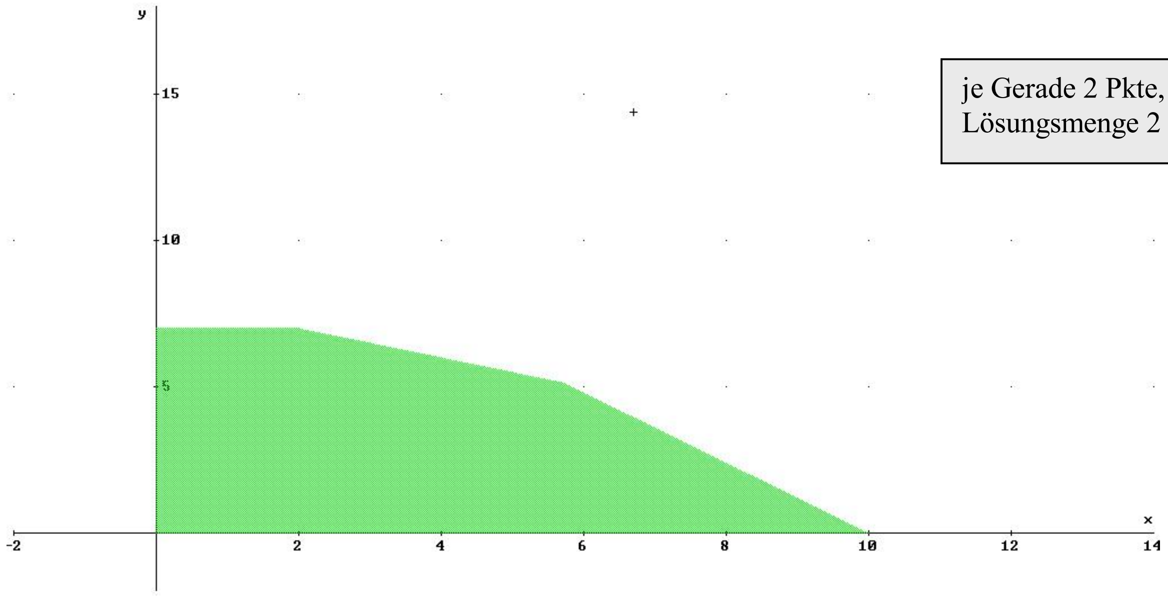
(3) $y=7$

Schnittpunkt mit der y-Achse (0; 7) (1 Pkt)

Grafen der Geraden zur Verdeutlichung:



Lösungsmenge: (8 Pkte)



je Gerade 2 Pkte,
Lösungsmenge 2 Pkte